ФМИ НА 2019-2020 - Задачи 2

Янис Василев, ianis@ivasilev.net

5 юни 2020

Упражнение (10.40)**.** Нека S е затворено непразно множество в $\mathbb{R}^n$. Дефинираме

$$\begin{aligned} d_S(x) &\coloneqq \inf_{y \in S} \|y - x\|, \\ p_S(x) &\coloneqq \{y \in S \mid d_S(x) = \|y - x\|\}. \end{aligned}$$

a) Да се докаже, че $\forall x \in S, 0 \in \partial_C d_S(x)$

b) Да се докаже, използвайки [Cla13, твърдение 10.36], че ако $x \notin S$ и $y \in p_S(x)$, тогава

$$\frac{x - y}{\|x - y\|} \in \partial_C d_S(y).$$

c) Да се докаже, че ако производната $d'_S(x)$ съществува в $x \in S$, тогава $d'_S(x) = 0$.

d) Нека $x \notin S$ и $d'_S(x)$ съществува. Нека $y \in p_S(x)$ и $h \in \mathbb{R}^n$. Да се докаже, че

$$\lim_{t \downarrow 0} \frac{\|x + th - y\| - \|x - y\|}{t} \geq \left\langle d'_S(x), h \right\rangle.$$

Да се докаже, че $d'_S(x) = \frac{(x-y)}{\|x-y\|}$ и че $p_S(x) = \{y\}$.

e) Нека $x \in \partial S$. Използвайки [Cla13, теорема 10.27], да се докаже, че

$$\partial_C d_S(x) = \operatorname{co} \left\{ 0, \lim_{i \to \infty} \frac{x_i - y_t}{\|x_i - y_t\|} \mid x_i \notin S, x_i \to x, y_t \in p_S(x_i) \right\}.$$

f) Нека $x \in d_S(x)$. Да се докаже, че

$$N_S^C(x) = \overline{\operatorname{co}} \left\{ \lambda \lim_{i \to \infty} \frac{x_i - y_t}{\|x_i - y_t\|} \mid \lambda \geq 0, x_i \notin S, x_i \to x, y_t \in p_S(x_i) \right\}.$$

Доказателство.

a) За всяка точка x от S, $d_S(x) = \inf_{y \in S} \|y - x\| = \|x - x\| = 0$, т.е. x е глобален минимум за d_S. Следователно $0 \in \partial_C d_S(x)$.

b) Нека сега $x \notin S$ и $y \in p_S(x)$. Полагаме $\xi = \frac{x-y}{\|x-y\|}$ и дефинираме

$$
\begin{aligned}
&f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\\
&f(z) \coloneqq \frac{\|x-z\|^2}{2\|x-y\|},
\end{aligned}
$$

така че f да е диференцируема и минимум за f върху S да се достига за $z = y$.

Понеже d_S е (глобално) липшицова с константа, не по-голяма от 1, от [Cla13, твърдение 10.36] имаме, че

$$0 \in \partial_C(f + d_S)(y) \subseteq \partial_C f(y) + \partial_c d_S(y).$$

От [Cla13, упражнение 10.16] имаме, че $\partial_C f(y) = \{f'(y)\}$. Следователно

$$-f'(y) \in \partial_C d_S(y).$$

За производната на f в z имаме

$$
\begin{aligned}
\left\langle f'(z), h \right\rangle &= \frac{1}{2\|x-y\|} \lim_{t \to 0} \frac{\|x-z-th\|^2 - \|x-z\|^2}{t} = \\
&= \frac{1}{2\|x-y\|} \lim_{t \to 0} \frac{\|x-z\|^2 - 2t\langle x-z, h\rangle + t^2\|h\|^2 - \|x-z\|^2}{t} = \\
&= \frac{1}{2\|x-y\|} \lim_{t \to 0} \left(-2\langle x-z, h\rangle + t\|h\|^2\right) = -\frac{\langle x-z, h\rangle}{\|x-y\|},
\end{aligned}
$$

т.е. $f'(z) = -\frac{x-z}{\|x-y\|}$.

Следователно

$$-f'(y) = \frac{x-y}{\|x-y\|} \in \partial_C d_S(y).$$

c) Нека $x \in S$. Допускаме, че $d'_S(x)$ съществува. Тогава $x \in \operatorname{int} S$, защото иначе едностранните производни по различните посоки не биха съвпаднали. Следователно съществува радиус $\delta > 0$, така че $B(x, \delta) \subseteq S$. Тогава

$$t \in (0, \delta) \implies \frac{d_S(x+th) - d_S(x)}{t} = \frac{0-0}{t} = 0$$

и следователно $d'_S(x) = 0$.

d) Нека $x \notin S$ и $d'_S(x)$ съществува. Нека $y \in p_S(x)$ и $h \in \mathbb{R}^n$. Тогава

$$\begin{aligned}
\left\langle d'_S(x), h \right\rangle &= \lim_{t \to 0} \frac{d_S(x+th) - d_S(x)}{t} = \\
&= \lim_{t \downarrow 0} \frac{d_S(x+th) - d_S(x)}{t} = \\
&= \lim_{t \downarrow 0} \frac{\inf_{z \in S} \|x+th-z\| - \inf_{z \in S} \|x-z\|}{t} = \\
&= \lim_{t \downarrow 0} \frac{\inf_{z \in S} \|x+th-z\| - \|x-y\|}{t} \leq \\
&\leq \lim_{t \downarrow 0} \frac{\inf_{z \in S} (\|x+th-y\| + \|y-z\|) - \|x-y\|}{t} = \\
&= \lim_{t \downarrow 0} \frac{\|x+th-y\| - \|x-y\|}{t}.
\end{aligned}$$

Понеже нормите са изпъкнали функции, получаваме, че $d'_S(x)$ принадлежи на (обикновения) субдиференциал $\partial \|x-y\|$ на $\|\cdot\|$ в точка $x-y$.

Нека сега да разгледаме разликата

$$\begin{aligned}
&\frac{\|x+th-y\| - \|x-y\|}{t} - \left\langle \frac{x-y}{\|x-y\|}, h \right\rangle \ \Big| \cdot t \|x-y\| \\
&\|x-y\| \|x+th-y\| - \langle x-y, x-y \rangle - \langle x-y, th \rangle .
\end{aligned}$$

От неравенството на Коши-Буняковски-Шварц имаме, че

$$\|x-y\| \|x+th-y\| - \langle x-y, x+th-y \rangle \geq 0,$$

следователно

$$\frac{\|x+th-y\| - \|x-y\|}{t} \geq \left\langle \frac{x-y}{\|x-y\|}, h \right\rangle .$$

След граничен преход $t \downarrow 0$ получаваме

$$\left\langle \frac{x-y}{\|x-y\|}, h \right\rangle \leq \lim_{t \downarrow 0} \frac{\|x+th-y\| - \|x-y\|}{t}.$$

Следователно $\frac{x-y}{\|x-y\|} \in \partial \|x-y\|$.

Тъй като евклидовата норма е диференцируема в $x - y \neq 0$, получаваме, че $\partial \|x-y\|$ е едноелементно множество и

$$f'(x) = \frac{x-y}{\|x-y\|}.$$

Тъй като това равенство важи за всяко $y \in p_S(x)$, получаваме, че и p_S е едноелементно множество, т.е. $p_S(x) = \{y\}$.

e) Нека $x \in \partial S$. За d_S знаем, че

   a) d_S е диференцируема във вътрешността на S и производната ѝ там е 0. Следователно $0 \in \partial_C d_S(x)$.

   b) d_S е диференцируема навсякъде извън S, понеже евклидовата норма е диференцируема за ненулеви точки, и производната на d_S в $x \notin S$ е $\frac{x-y}{\|x-y\|}$, където y е единственият елемент на $p_S(x)$.

   От [Cla13, теорема 10.27] следва, че

$$\partial_C d_S(x) = \operatorname{co}\left\{0, \lim_{i\to\infty} \frac{x_i - y_i}{\|x_i - y_i\|} \mid x_i \notin S, x_i \to x, y_i \in p_S(x_i)\right\},$$

f) Нека $x \in \partial S$. Като вземем предвид, че в крайномерни пространства слабата и силната топология съвпадат, от [Cla13, теорема 10.34(c)] имаме, че

$$N_S^C(x) = \operatorname{cl}\{\lambda\xi \mid \lambda \geq 0, \xi \in \partial_C d_S(x)\}.$$

   От вече доказаното представяне на $\partial_C d_S(x)$ следва, че

$$N_S^C(x) = \operatorname{cl}\left\{\lambda \lim_{i\to\infty} \frac{x_i - y_i}{\|x_i - y_i\|} \mid \lambda \geq 0, x_i \notin S, x_i \to x, y_i \in p_S(x_i)\right\}.$$

□

Упражнение (11.15)**.** Нека $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ е липшицова в околност U на x и нека $\partial_L f(x) = \{\xi\}$. Тогава f е диференцируема в x и $f'(x) = \xi$.

Доказателство. Диференцируемостта по Фреше и по Гато в U са еквивалентни поради липшицовостта на f в U (в крайномерно пространство). Трябва само да докажем, че ξ е диференцируема по Гато.

Да допуснем, че ξ не е производна на Гато на f в x (не предполагаме диференцируемост). Тогава съществува $\varepsilon > 0$, посока $h \in S_X$ и редица $\{t_n\}_n$ от положителни числа, клоняща към 0, така че за всяко $n = 1, 2, \ldots$ да бъде изпълнено

$$\left|\frac{f(x + t_n h) - f(x)}{t_n} - \langle \xi, h\rangle\right| \geq \varepsilon.$$

Евентуално пренебрегвайки краен брой членове от редицата, можем да считаме, че за всяко $n = 1, 2, \ldots$, f е липшицова в множеството $[x, x + t_n h] + B(0, t_n\varepsilon)$.

От [Cla13, следствие 11.5] следва, че съществуват $y \in [x, x + t_n h] + B(0, t_n\varepsilon)$ и $\eta_n \in \partial_P f(y)$, така че

$$f(x + t_n h) - f(x) \leq \langle \eta_n, t_n h\rangle + t_n\varepsilon \;\Big|\cdot \frac{1}{t_n}$$

$$\frac{f(x + t_n h) - f(x)}{t_n} - \langle \eta_n, h\rangle \leq \varepsilon.$$

Тогава имаме

$$\frac{f(x+t_n h)-f(x)}{t_n} - \langle \eta_n, h \rangle \le \varepsilon \le \frac{f(x+t_n h)-f(x)}{t_n} - \langle \xi, h \rangle .$$

Тъй като f е липшицова, от [Cla13, следствие 11.7] следва, че редицата $\{\eta_n\}_n$ е ограничена. Следователно тя има сходяща подредица $\{\eta_{n_k}\}_k$.

Понеже редицата $\{x + t_{n_k}\}_k$ клони към x и редицата $\{\eta_{n_k}\}_k$ е сходяща, имаме, че

$$\lim_{k\to\infty} \eta_{n_k} \in \partial_L f(x) = \{\xi\},$$

т.е. $\xi = \lim_{k\to\infty} \eta_{n_k}$.

Понеже още не сме установили, че границата на диференчните частни съществува, ще използваме $\limsup$:

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{f(x+t_{n_k} h)-f(x)}{t_{n_k}} - \left\langle \lim_{k\to\infty} \eta_{n_k}, h \right\rangle \le \varepsilon \le \limsup_{k\to\infty} \frac{f(x+t_{n_k} h)-f(x)}{t_{n_k}} - \langle \xi, h \rangle .$$

Лявата и дясната част на неравенството съвпадат, откъдето получаваме $\varepsilon = 0$, което е в противоречие с $\varepsilon > 0$.

Полученото противоречие доказва, че f е диференцируема в x с производна $f'(x) = \xi$. $\square$

Литература

[Cla13] Francis Clarke. Functional Analysis, Calculus of Variations and Optimal Control. Springer London, 2013. DOI: `10.1007/978-1-4471-4820-3`. URL: `https://doi.org/10.1007/978-1-4471-4820-3`.